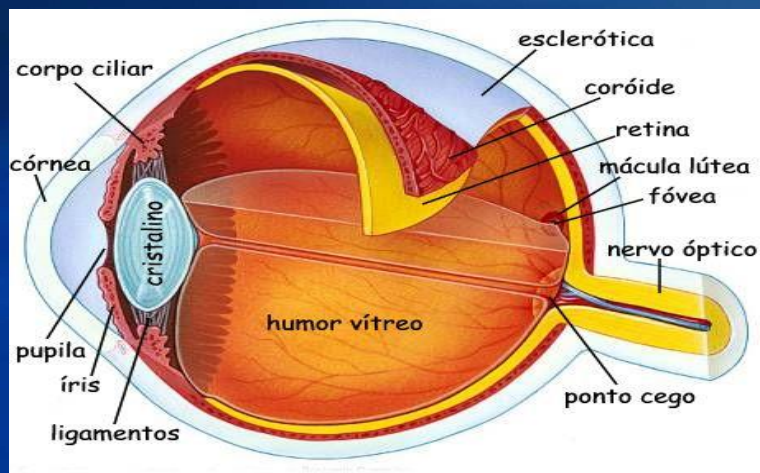


# *Projeções Perspectivas e Paralelas*

## Projeções

- Visão humana: enxerga em 2D, a sensação de profundidade vem da diferença entre as vistas esquerda e direita do mesmo objeto
- Projeção: conversão genérica de entidades de uma dada dimensão para outra de menor ordem
- CG:
  - conversão 3D para 2D

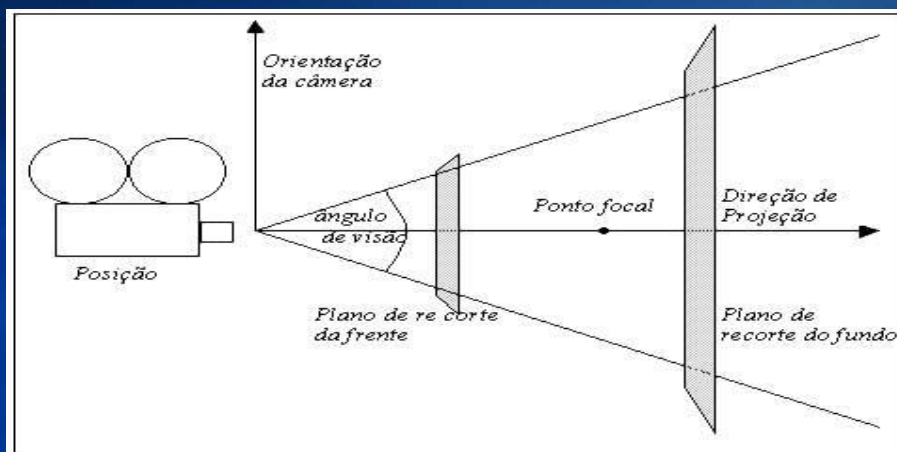
# Anatomia do Olho



## Tipos de projeção

- Determinam a projeção:
  - plano de projeção: quadro
  - centro de projeção: ponto de vista
- Técnicas de projeção 3D/2D:
  - projeção paralela
  - projeção perspectiva (de grande interesse na Computação Gráfica)

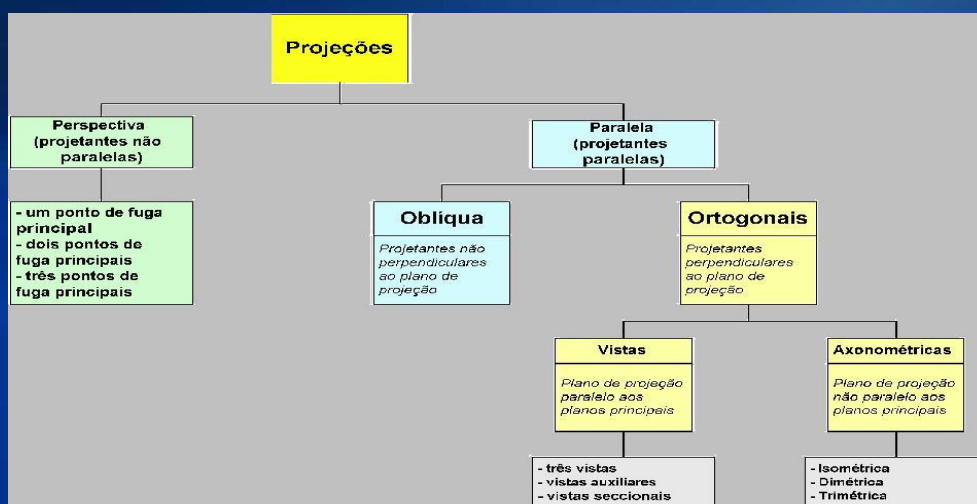
# Projeção



Atributos da câmera [Schröder et al. 1998].

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Tipos de Projeções



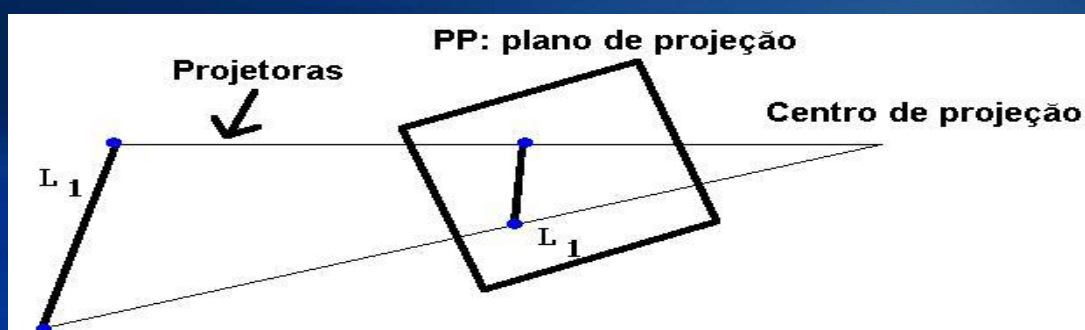
Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Tipos de Projeções

- **Proj. Perspectiva (cônica):** o centro de projeção é um ponto próprio, em coordenadas finitas no sistema tridimensional. Esta projeção deforma a figura, diminuindo os objetos mais distantes e distorcendo os ângulos.
- **Proj. Paralelas (cilíndricas):** tem um ponto impróprio como centro de projeção - isto é; as linhas visuais encontram-se no infinito. Mantém a proporcionalidade da figura.

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

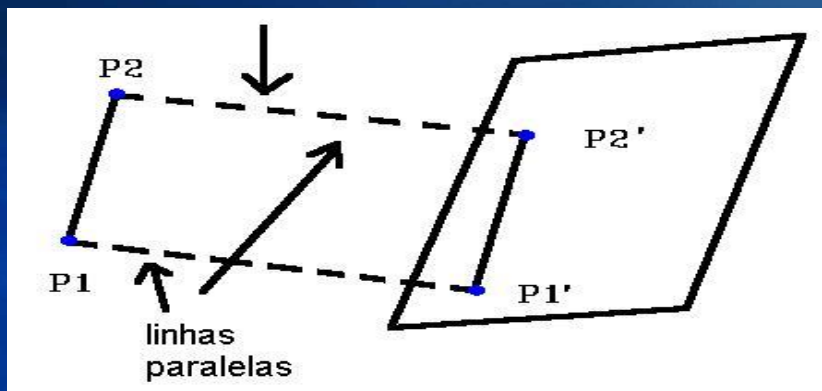
## Proj. Perspectiva



Obs: o centro de projeção está a uma distância infinita do plano de projeção

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Projeção Paralela



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Transformação de Projeção

- Projeções: forma específica de transformação geométrica
- necessidade de identificar matrizes 4x4 que, aplicadas a um dado ponto do espaço obtenham o ponto no plano equivalente
- o objeto a ser projetado deve estar descrito de tal forma que as direções principais do mesmo coincidam com os eixos do sistema
- o plano de projeção é um plano vertical, colocado perpendicularmente ao eixo z do sistema de coordenadas do objeto
- o objeto encontra-se modelado convenientemente

Prof. Dr. Alexandre Cardoso



## Transformação de Projeção

- Obs: havendo mais de um objeto em cena é necessário uma conversão entre os sistemas de coordenadas do objeto e da cena. Os pontos de cada objeto devem ser convertidos para o sistema global por uma transformação de mudança de base, antes de se efetuar as transformações de projeção.

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Projeções Perspectivas

- Fortemente determinada pelo centro de projeção
- similar à câmaras de vídeo e ao olho humano
- imagem parece mais realista
- não preserva ângulos
- não preserva escalas

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Projeções Perspectivas

- não permite medidas diretas
- objetos mais distantes parecem menores
- retas paralelas se encontram em um ponto: ponto de fuga
- pode haver: 1, 2, 3 pontos de fuga.

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Projeção Perspectiva

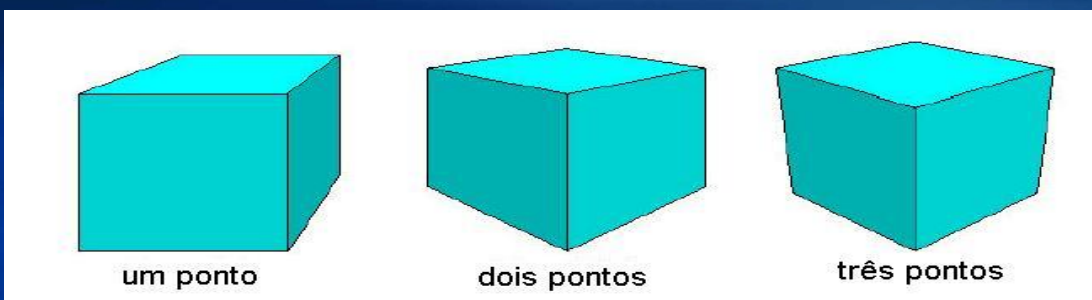
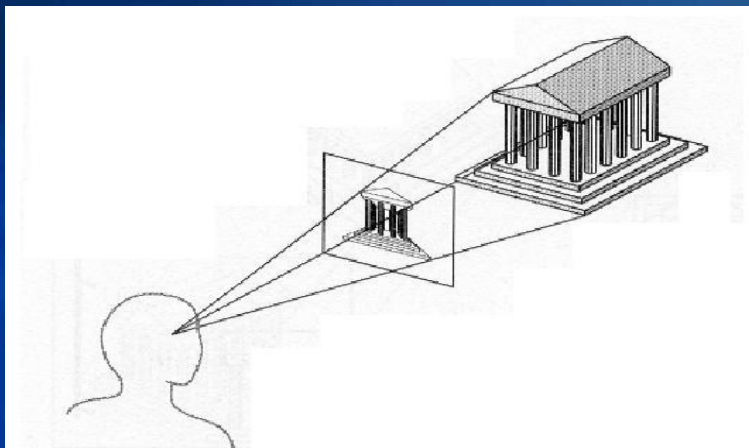


Figura: pontos de fuga possíveis

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

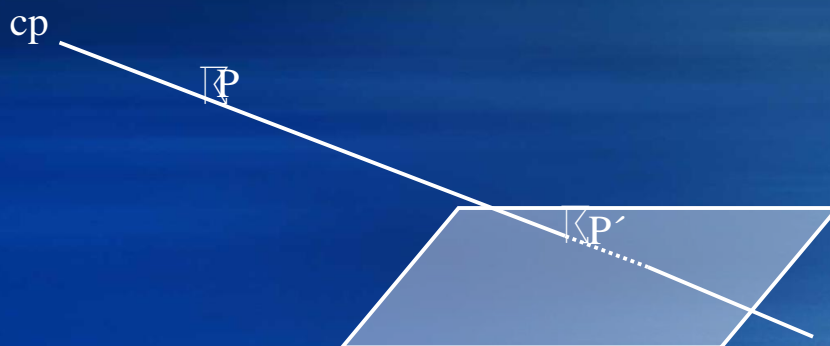
# Projeção Perspectiva



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Projeções Perspectivas

- 1. Do ponto:

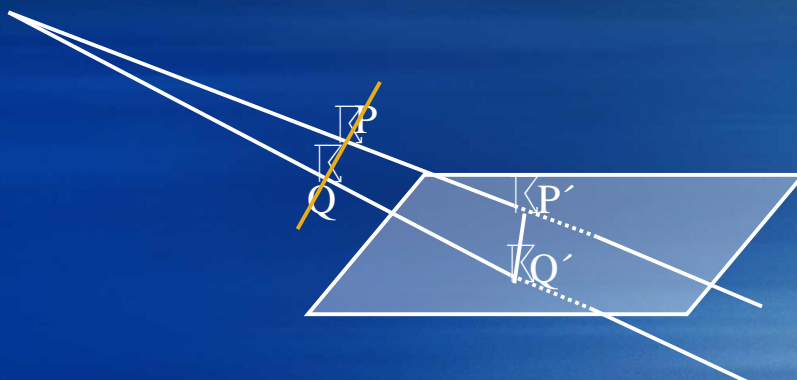


Prof. Dr. Alexandre Cardoso



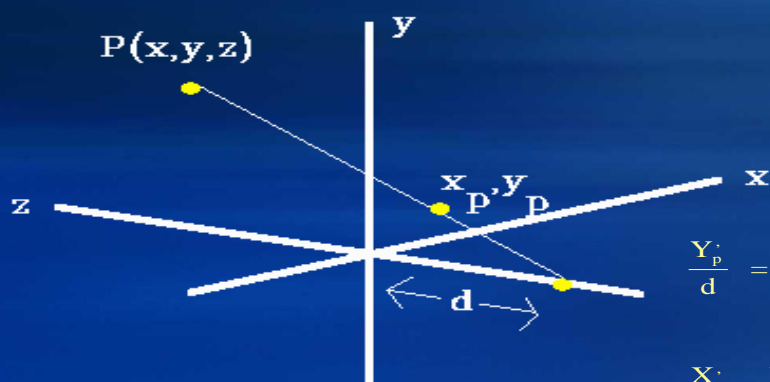
# Projeções Perspectivas

- 2. Da reta: idem ao caso anterior, considerando dois pontos:



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Projeções Perspectivas



$$\frac{Y_p'}{d} = \frac{Y_p}{Z_R};$$

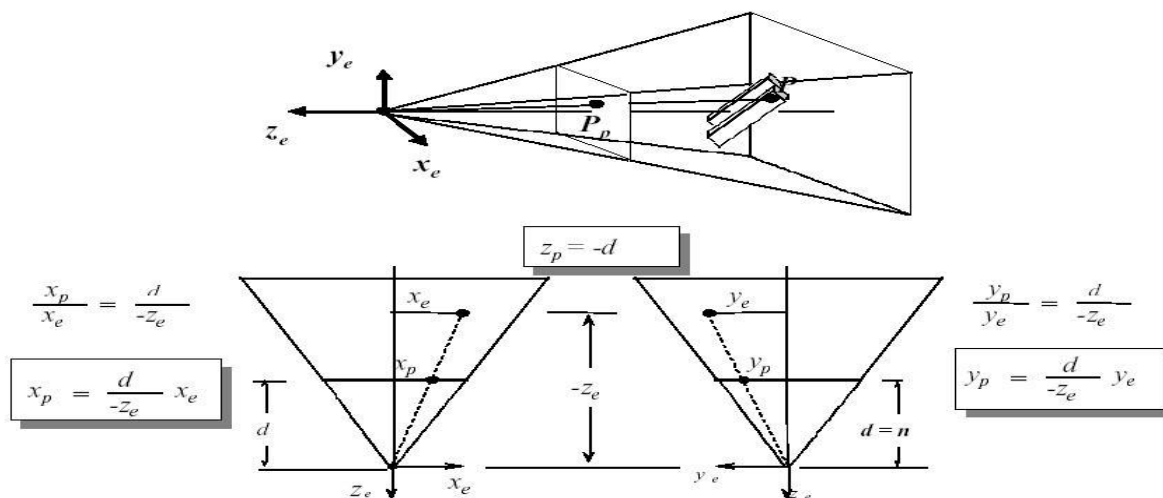
$$Y_p' = \frac{Y_p \cdot d}{Z_R} = \frac{Y_p}{Z_R/d}$$

$$\frac{X_p'}{d} = \frac{X_p}{Z_p}$$

$$\Rightarrow X_p' = \frac{X_p \cdot d}{Z_p} = \frac{X_p}{Z_p/d}$$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Projeções Perspectivas



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Projeção Perspectiva

- Matriz de projeção:

$$M_p = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

chegando a:  $X = \frac{X}{Z+d} \cdot \frac{d}{d}$  ;  $Y = \frac{Y}{Z+d} \cdot \frac{d}{d}$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Exemplo

- Dado o objeto definido pelas tabelas abaixo e o plano de projeção dado por  $z = 20$ , obtenha os pontos projetados:

PONTO	X	Y	Z
1	40	60	40
2	20	20	10
3	60	30	15
4	20	40	60
5	70	40	70

lado (1, P1, P2)  
 lado (2, P1, P3)  
 lado (3, P1, P4)  
 lado (4, P1, P5)  
 lado (5, P2, P3)

lado (6, P2, P4)  
 lado (7, P3, P5)  
 lado (8, P4, P5)



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Exemplo

- Pontos resultantes:

$P1'(20,30)$

$P2'(40,40)$

$P3'(80,40)$

$P4'(6.67,13,33)$

$P5'(20,11.4)$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Projeções Perpectivas

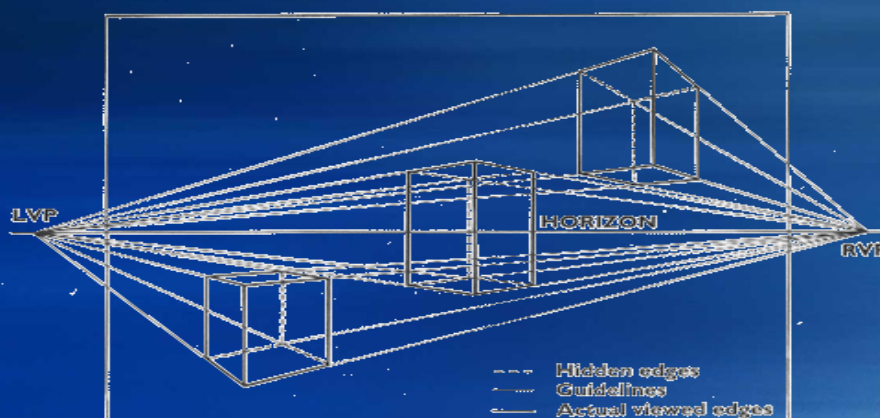
- Com dois/três pontos de fuga:

$$\text{Pontos de projecao } \begin{cases} x = r_1 \\ y = r_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/r_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Pontos de projecao } \begin{cases} x = r_1 \\ y = r_2 \\ z = r_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/r_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/r_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

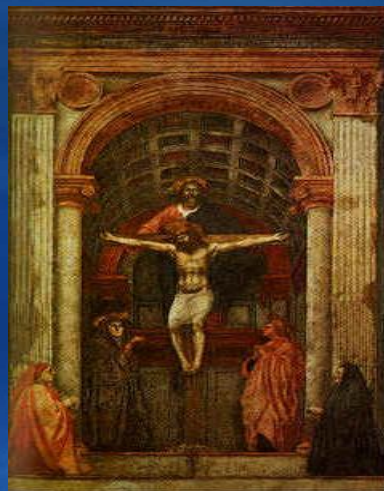
## Esboço



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Exemplos

*Figura: Trinity with the Virgin, St. John and Donors*) feita em perspectiva por Masaccio, em 1427. Traçado com um ponto de fuga.



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Exemplos

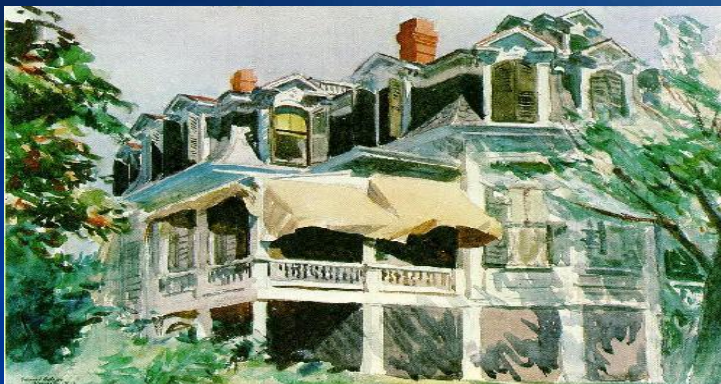


*Figura: The Piazza of St. Mark, Venice*) feita por Canaletto em 1735-45 - perspectiva com um ponto de fuga.

Prof. Dr. Alexandre Cardoso



## Exemplos



**Figura:** *The Mansard Roof* - 1923 por Edward Hopper com dois pontos de fuga.

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Exemplos



**Figura:** *(City Night, 1926)* por Georgia O'Keeffe, com, aproximadamente, três pontos de fuga.

Prof. Dr. Alexandre Cardoso



## Anomalias da Perspectiva

- Encurtamento perspectivo: aumentando a distância do objeto ao centro de projeção: objeto parece ser menor;
- Pontos de fuga: as projeções são categorizadas pelo número de pontos de fuga principais ( $n^\circ$  de eixos que o plano de projeção corta). Se a projeção é com 1 ponto de fuga principal então o plano de projeção corta o eixo  $z$  e linhas paralelas aos eixos  $x$  e  $y$  não convergem.

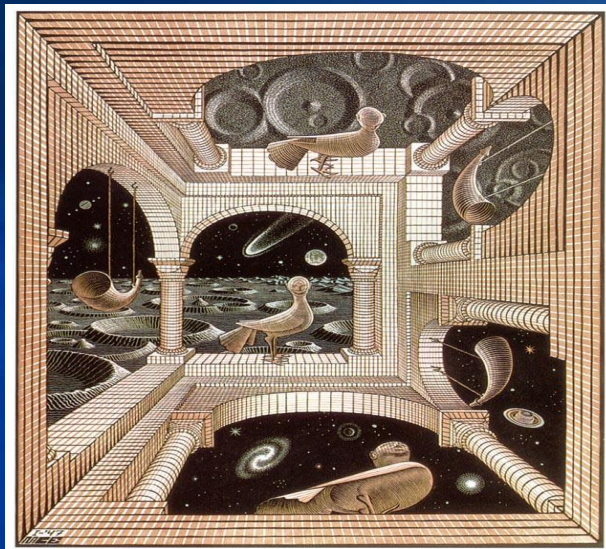
Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Anomalias da Perspectiva

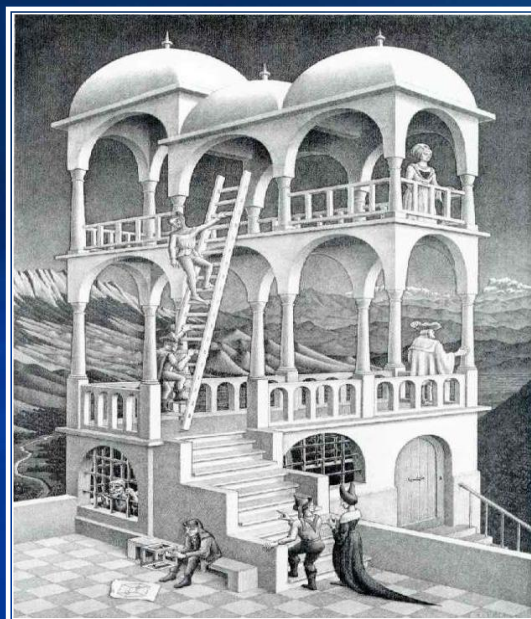
- Confusão visual: objetos situados atrás do centro de projeção são projetados no plano de projeção de cima para baixo e de trás para frente
- Distorção topológica: Fenômeno pela qual um segmento de reta que une um ponto situado à frente do observador com um ponto situado à sua retaguarda é efetivamente projetado segundo uma linha quebrada de comprimento infinito. A causa é o fato de que pontos do plano que contêm o ponto central da projeção são projetados no infinito pela transformação.

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# A Perspectiva



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

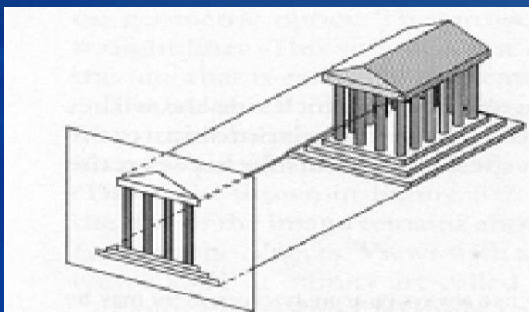


*Belvedere*

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Projeções Cilíndricas - Paralelas

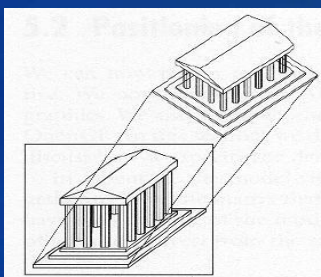
- Ortogonais:
  - a direção de projeção é a mesma direção da normal ao plano de projeção



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Projeções Paralelas

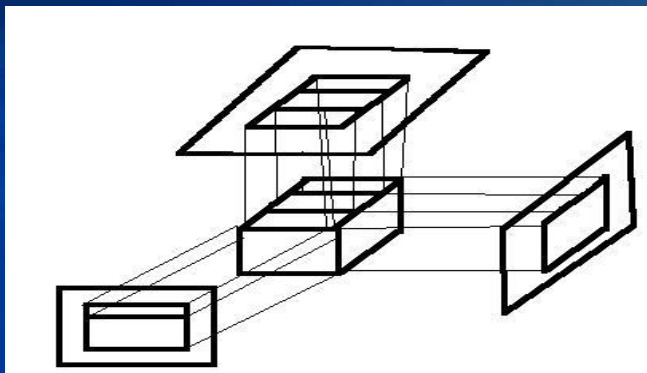
- Oblíqua:
  - a direção de projeção não é a mesma direção da normal ao plano de projeção
  - permite a vista de mais de um lado do objeto



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Projeções Ortogonais ou Ortográficas

- Vistas: coleção das vistas de topo, frente e lado do objeto



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Projeções Ortogonais ou Ortográficas

- **Matemática:** supondo a projeção ortogonal no plano de projeção  $z = 0$ . A direção de projeção é a mesma da normal ao plano de projeção, no caso, o eixo  $z$ . Um ponto  $P(x,y,z)$  é projetado por  $x_p = x$ ,  $y_p = y$ ,  $z_p = 0$ .

$$P_{ortogonal} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso



# Projeções Axonométricas

- Usadas para dar sensação 3D, a partir da proj. paralela
- mostra mais de uma face do objeto projetado
- o plano de projeção não pode ser perpendicular a um eixo principal
- pode ser:
  - *isométrica*
  - *dimétrica*
  - *trimétrica*

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Projeção Axonométrica

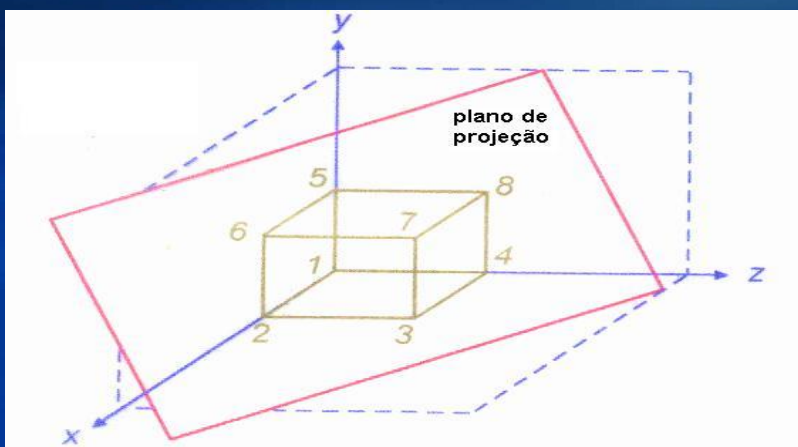
**Projeção isométrica:** a normal ao plano de projeção faz ângulos iguais com cada um dos eixos principais.



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Projeção Axonométrica Isométrica

- Seja o cubo (objeto) abaixo e o plano de projeção da figura:



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Projeção Axonométrica Isométrica

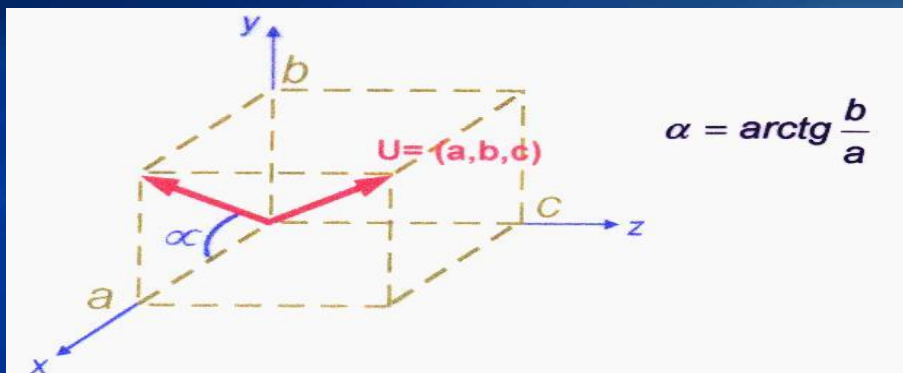
- Passos da projeção:
  - rotação com o plano de projeção de forma que o mesmo fique paralelo ao plano xy
  - nova rotação, em torno de y, de forma que a normal ao plano de projeção coincida com o eixo z
  - obtem-se os pontos da projeção.

Prof. Dr. Alexandre Cardoso



## Projeção Axonométrica Isométrica

- Rotação para paralelismo a xy - rotação em torno do eixo z

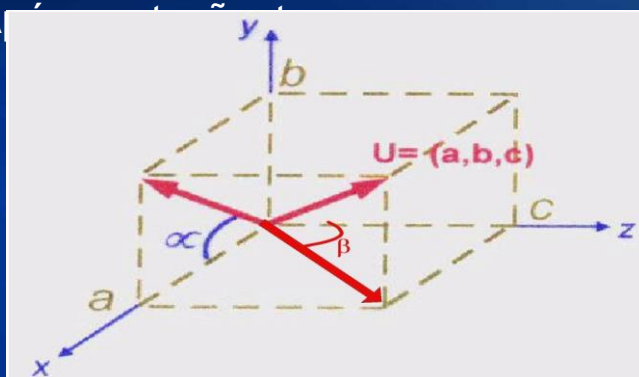


Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Projeção Axonométrica Isométrica

Se isométrica, no passo anterior:  $b=a=c$ , então  $\alpha = \arctg 1 = 45^\circ$

- A



$$\beta = \arctg (a/c)$$

$$\beta = \arctg (l \cdot \sqrt{2} / l)$$

se isométrica:

$$\beta = 54,73^\circ$$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Projeção Axonométrica Isométrica

- Matriz da projeção:

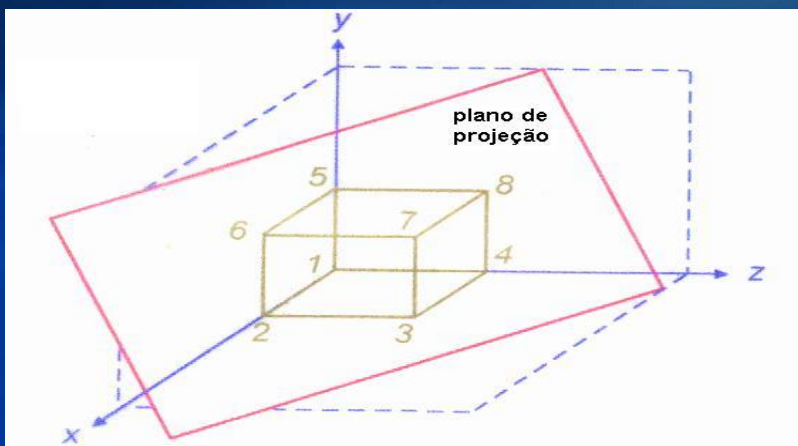
$$M = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \beta & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha \cdot \cos \beta & \cos \alpha & 0 & 0 \\ \sin \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se isométrica:  $T_{iso} = \begin{Bmatrix} 0.5 & 0.7071 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.7071 & -0.5 & 0 \\ 0.7071 & 0 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Projeção Axonométrica Isométrica

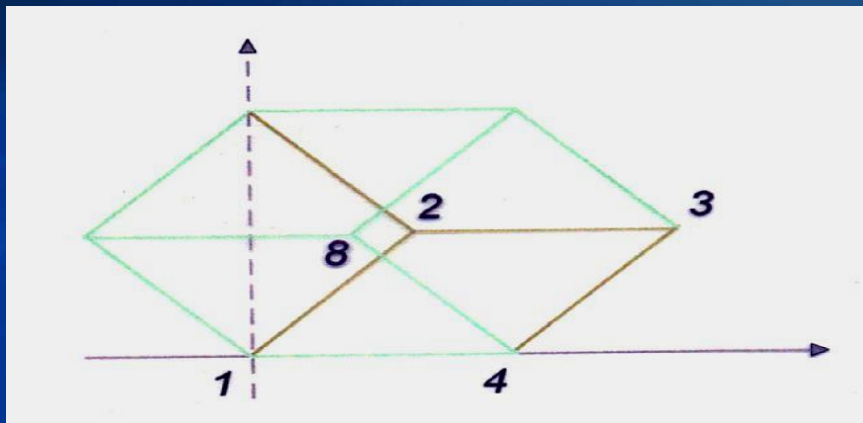
- Seja o cubo (objeto) abaixo e o plano de projeção da figura:



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Projeção Axonométrica Isométrica

Resultado:



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

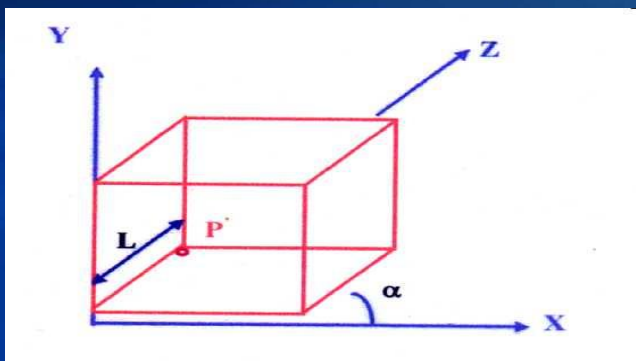
## Projeções Oblíquas

- Fornecem sensação espacial e permitem medidas
- a direção de projeção não forma  $90^\circ$  com o plano de projeção, mas,
- o plano de projeção é paralelo a um dos 3 eixos
- Geralmente:
  - faz-se uma face paralela ao plano de projeção (normalmente, a face que tem mais detalhes)
  - a face paralela projeta-se em sua verdadeira grandeza

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Projeções Oblíquas

- Seja o cubo unitário da figura, deseja-se projetá-lo no plano xy:



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Projeções Oblíquas

## Matemática da projeção:

- o ponto  $(0,0,1)$  é projetado em xy como  $(l.\cos\alpha, l.\sin\alpha)$ , levando a outro ponto no espaço dado por  $P'(l.\cos\alpha, l.\sin\alpha, 0)$
- Como a linha projetora deve passar por P e  $P'$ , sendo as demais paralelas a ela, temos, considerando a equação simétrica da reta:

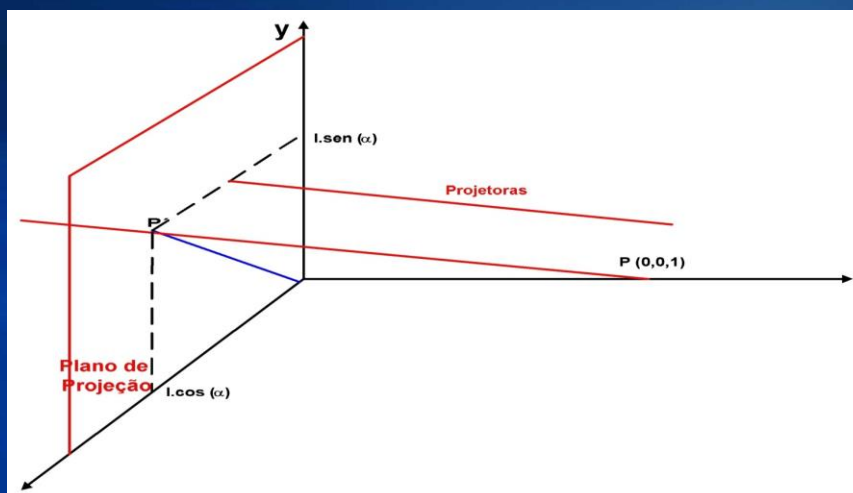
$$\frac{x - x_p}{l.\cos\alpha} = \frac{y - y_p}{l.\sin\alpha} = \frac{z - 0}{-1}$$

$$\frac{x - x_p}{l.\cos\alpha} = -z \Rightarrow x_p = x + z.l.\cos\alpha$$

$$\text{e } y_p = y + z.l.\sin\alpha$$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Projeções Oblíquas



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Projeções Oblíquas

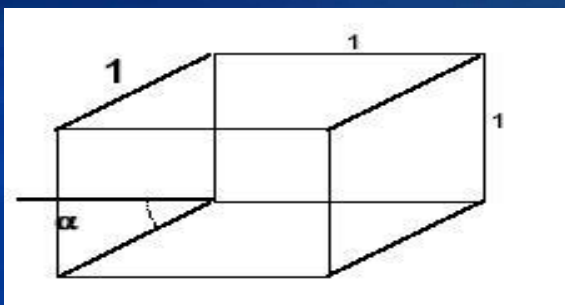
- Matriz da projeção:

$$P_{obl.} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l \cdot \cos \alpha & l \cdot \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Projeções Oblíquas

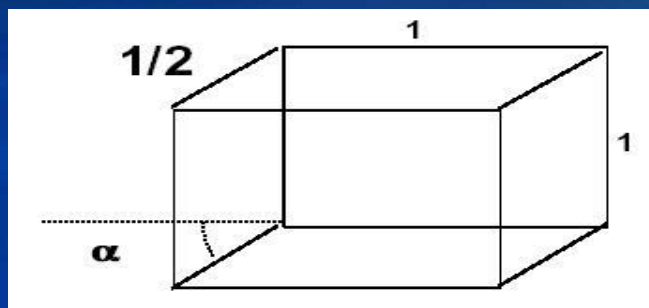
Se  $l = 1$  e  $\alpha = 45^\circ$  ( $\beta = 45^\circ$ )  $\Rightarrow$  projeção cavaleira (cavalier)



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Projeções Oblíquas

- Se  $l = 1/2$  e  $\alpha = 45^\circ$  ( $\beta = \arctg 2$  - aprox:  $63,4^\circ$ ) a projeção é dita gabinete (cabinet)



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

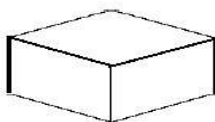


# Comparações - projeções de um cubo

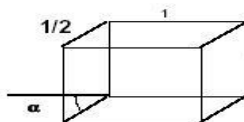
## • Paralelas



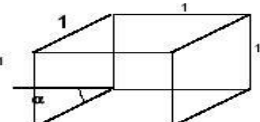
planta ou  
elevação



iso-métrica

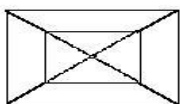


Cavaleira

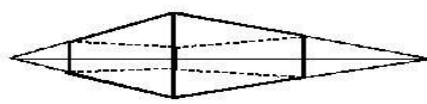


Cabinete

## • Cônicas



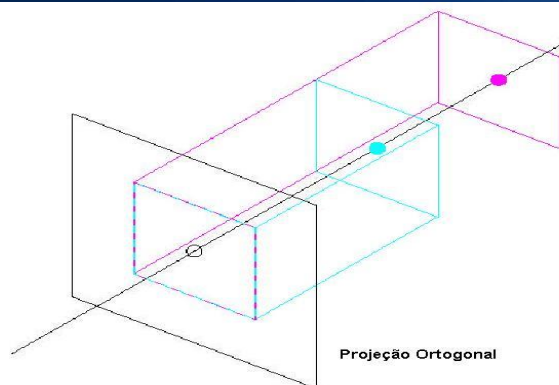
1 pto de fuga



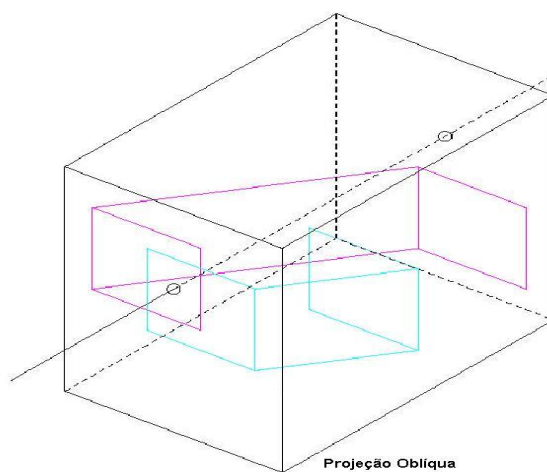
2 ptos de fuga

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Comparações



Projeção Ortogonal



Projeção Obliqua

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Para saber mais

- Teoria Geral das Projeções

- Link da USP



Prof. Dr. Alexandre Cardoso