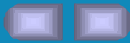


Projeções

- Visão humana: enxerga em 2D, a sensação de profundidade vem da diferença entre as vistas esquerda e direita do mesmo objeto
- Projeção: conversão genérica de entidades de uma dada dimensão para outra de menor ordem
- CG:
 - conversão 3D para 2D



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

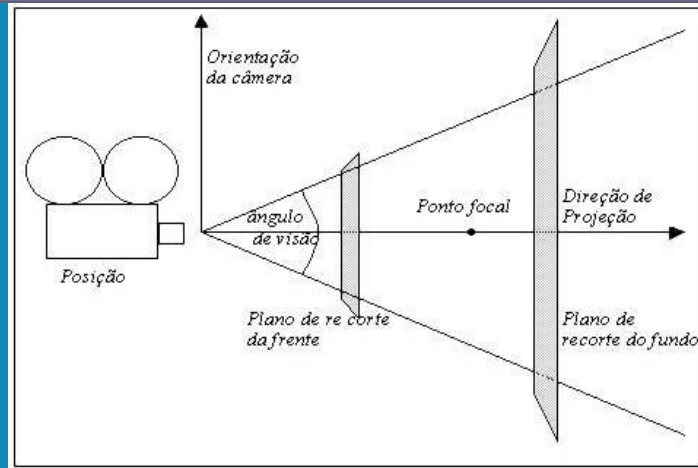
Tipos de projeção

- Determinam a projeção:
 - plano de projeção: quadro
 - centro de projeção: ponto de vista
- Técnicas de projeção 3D/2D:
 - projeção paralela
 - projeção perspectiva (de grande interesse na Computação Gráfica)



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

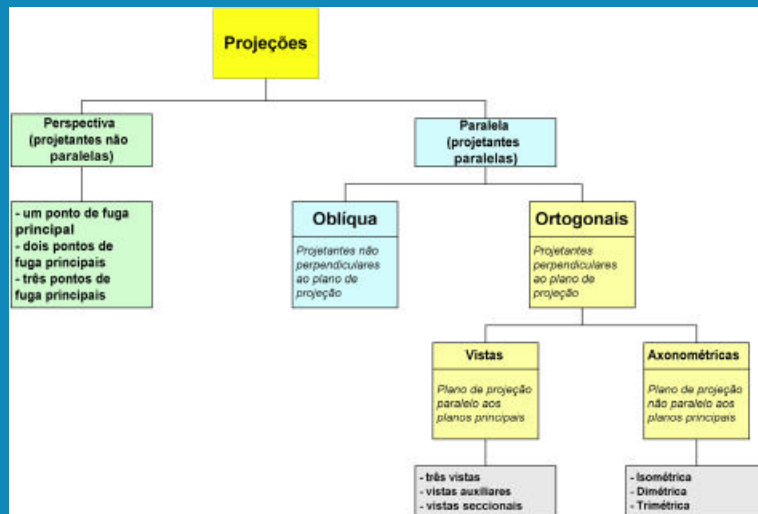
Projeção



Atributos da câmera [Schröder et al. 1998].

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

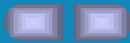
Tipos de Projeções



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

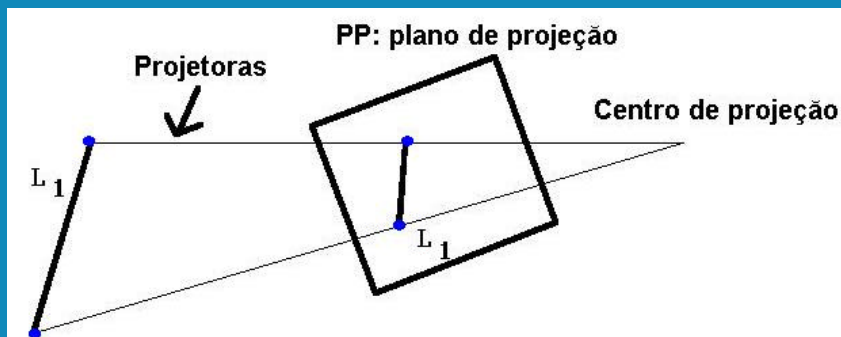
Tipos de Projeções

- **Proj. Perspectiva (cônica):** o centro de projeção é um ponto próprio, em coordenadas finitas no sistema tridimensional. Esta projeção deforma a figura, diminuindo os objetos mais distantes e distorcendo os ângulos.
- **Proj. Paralelas (cilíndricas):** tem um ponto impróprio como centro de projeção - isto é; as linhas visuais encontram-se no infinito. Mantém a proporcionalidade da figura.



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Proj. Perspectiva

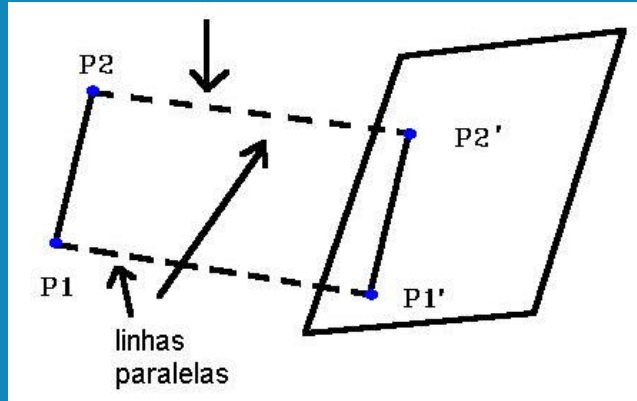


Obs: o centro de projeção está a uma distância infinita do plano de projeção



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeção Paralela



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

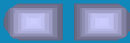
Transformação de Projeção

- Projeções: forma específica de transformação geométrica
- necessidade de identificar matrizes 4x4 que, aplicadas a um dado ponto do espaço obtenham o ponto no plano equivalente
- o objeto a ser projetado deve estar descrito de tal forma que as direções principais do mesmo coincidam com os eixos do sistema
- o plano de projeção é um plano vertical, colocado perpendicularmente ao eixo z do sistema de coordenadas do objeto
- o objeto encontra-se modelado convenientemente

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Transformação de Projeção

- Obs: havendo mais de um objeto em cena é necessário uma conversão entre os sistemas de coordenadas do objeto e da cena. Os pontos de cada objeto devem ser convertidos para o sistema global por uma transformação de mudança de base, antes de se efetuar as transformações de projeção.



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeções Perspectivas

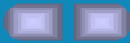
- Fortemente determinada pelo centro de projeção
- similar à câmaras de vídeo e ao olho humano
- imagem parece mais realista
- não preserva ângulos
- não preserva escalas



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeções Perspectivas

- não permite medidas diretas
- objetos mais distantes parecem menores
- retas paralelas se encontram em um ponto: ponto de fuga
- pode haver: 1, 2, 3 pontos de fuga.



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeção Perspectiva

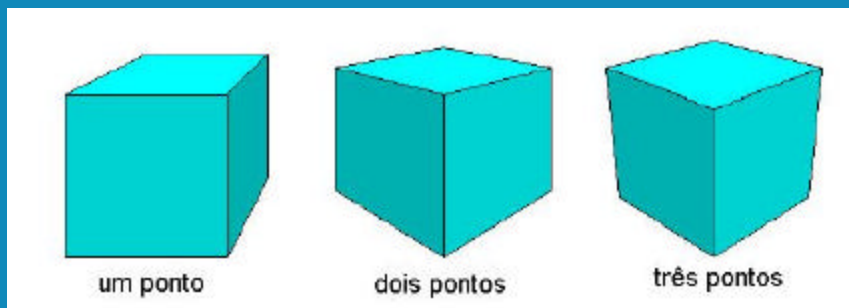
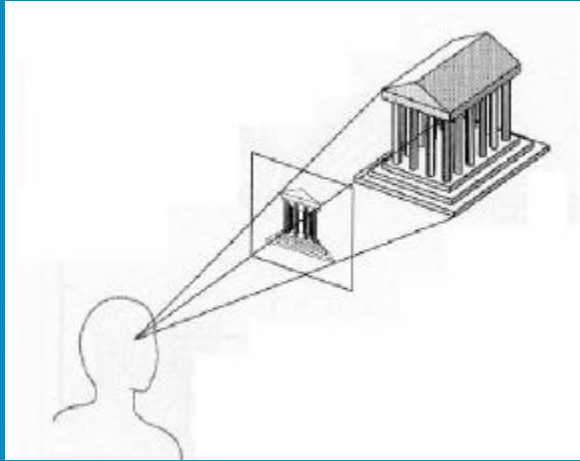


Figura: pontos de fuga possíveis



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

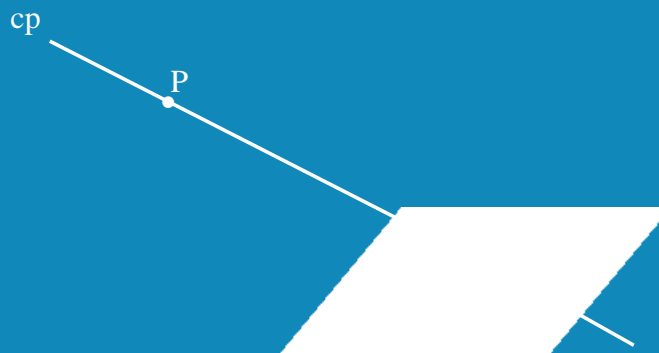
Projeção Perspectiva



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeções Perspectivas

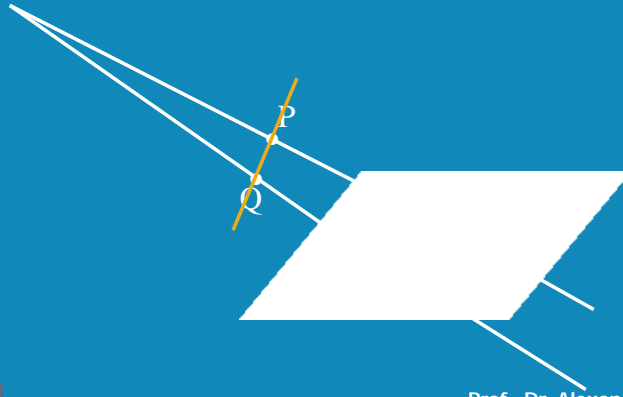
- 1. Do ponto:



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

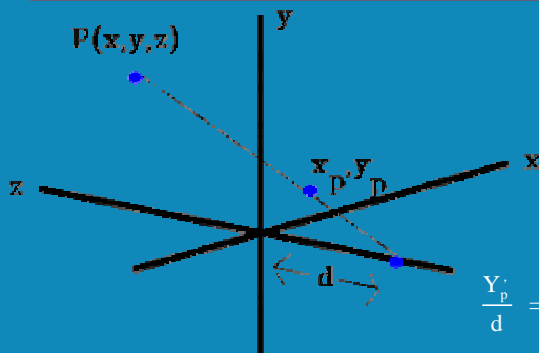
Projeções Perspectivas

- 2. Da reta: idem ao caso anterior, considerando dois pontos:



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeções Perspectivas



$$\frac{Y_p}{d} = \frac{Y_p}{Z_R};$$

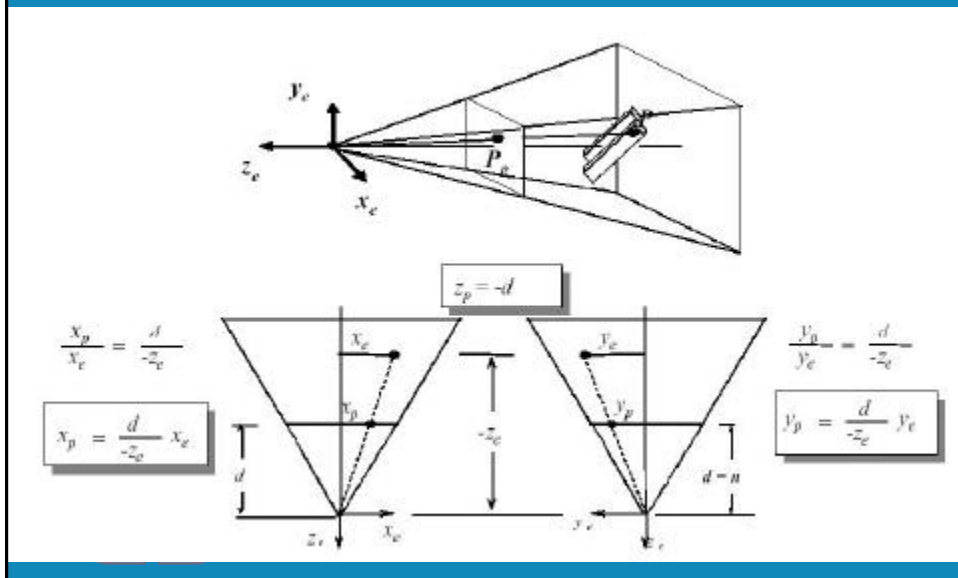
$$Y_p = \frac{Y_p \cdot d}{Z_R} = \frac{Y_p}{Z_R/d}$$

$$\frac{X_p}{d} = \frac{X_p}{Z_p}$$

$$\Rightarrow X_p = \frac{X_p \cdot d}{Z_p} = \frac{X_p}{Z_p/d}$$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeções Perspectivas



Projeção Perspectiva

- Matriz de projeção:

$$M_p = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

chegando a: $X = \frac{X}{Z+d} \cdot d$; $Y = \frac{Y}{Z+d} \cdot d$



Exemplo

- Dado o objeto definido pelas tabelas abaixo e o plano de projeção dado por $z = 20$, obtenha os pontos projetados:

PONTO	X	Y	Z
1	40	60	40
2	20	20	10
3	60	30	15
4	20	40	60
5	70	40	70

lado (1, P1, P2)

lado (2, P1, P3)

lado (3, P1, P4)

lado (4, P1, P5)

lado (5, P2, P3)

lado (6, P2, P4)

lado (7, P3, P5)

lado (8, P4, P5)



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Exemplo

- Pontos resultantes:

$P1'(20,30)$

$P2'(40,40)$

$P3'(80,40)$

$P4'(6.67,13,33)$

$P5'(20,11.4)$



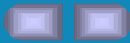
Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeções Perspectivas

- Com dois/três pontos de fuga:

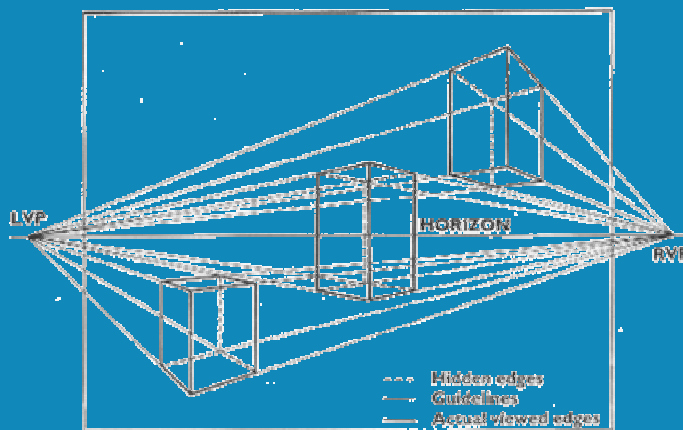
$$\text{Pontos de projecao} \begin{cases} x = r_1 \\ y = r_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 100 \frac{1}{r_1} \\ 010 \frac{1}{r_2} \\ 0000 \\ 0000 \end{bmatrix}$$

$$\text{Pontos de projecao} \begin{cases} x = r_1 \\ y = r_2 \\ z = r_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 100 \frac{1}{r_1} \\ 010 \frac{1}{r_2} \\ 001 \frac{1}{r_3} \\ 0000 \end{bmatrix}$$



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

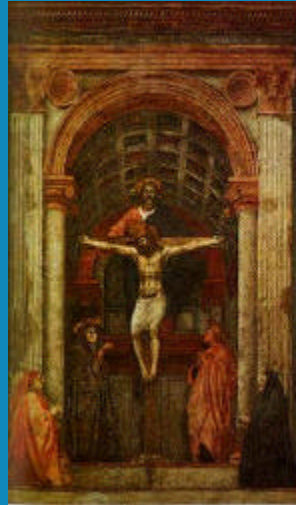
Esboço



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Exemplos

Figura: Trinity with the Virgin, St. John and Donors) feita em perspectiva por Masaccio, em 1427. Traçado com um ponto de fuga.



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Exemplos



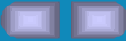
Figura: The Piazza of St. Mark, Venice) feita por Canaletto em 1735-45 - perspectiva com um ponto de fuga.

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Exemplos



Figura: *The Mansard Roof* - 1923 por Edward Hopper com dois pontos de fuga.



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Exemplos

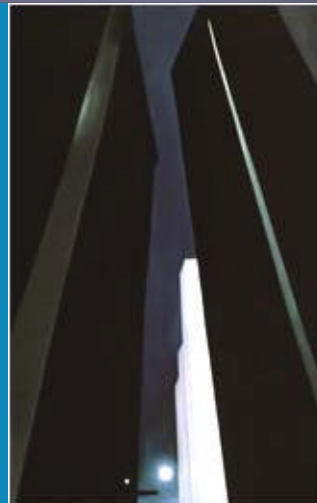


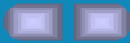
Figura: (*City Night*, 1926) por Georgia O'Keeffe, com, aproximadamente, três pontos de fuga.



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Anomalias da Perspectiva

- Encurtamento perspectivo: aumentando a distância do objeto ao centro de projeção: objeto parece ser menor;
- Pontos de fuga: as projeções são categorizadas pelo número de pontos de fuga principais (n° de eixos que o plano de projeção corta). Se a projeção é com 1 ponto de fuga principal então o plano de projeção corta o eixo z e linhas paralelas aos eixos x e y não convergem.



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Anomalias da Perspectiva

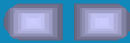
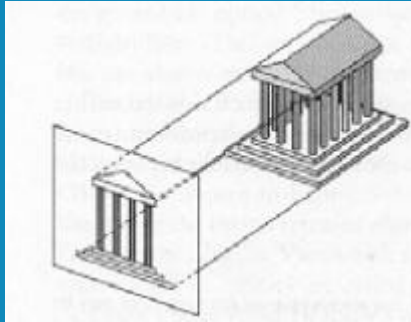
- Confusão visual: objetos situados atrás do centro de projeção são projetados no plano de projeção de cima para baixo e de trás para frente
- Distorção topológica: Fenômeno pela qual um segmento de reta que une um ponto situado à frente do observador com um ponto situado à sua retaguarda é efetivamente projetado segundo uma linha quebrada de comprimento infinito. A causa é o fato de que pontos do plano que contêm o ponto central da projeção são projetados no infinito pela transformação.



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeções Cilíndricas - Paralelas

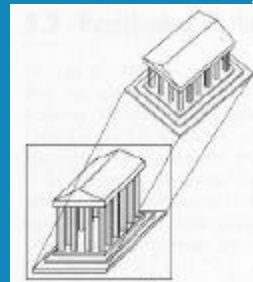
- Ortogonais:
 - a direção de projeção é a mesma direção da normal ao plano de projeção



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeções Paralelas

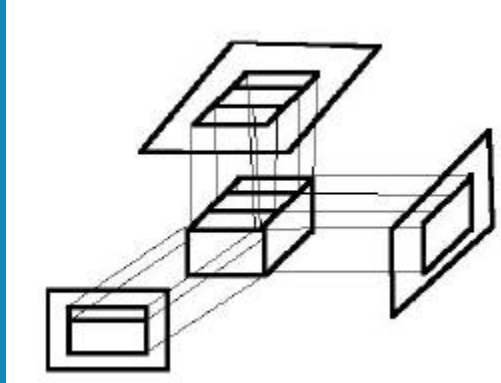
- Oblíqua:
 - a direção de projeção não é a mesma direção da normal ao plano de projeção
 - permite a vista de mais de um lado do objeto



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeções Ortogonais ou Ortográficas

- Vistas: coleção das vistas de topo, frente e lado do objeto



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeções Ortogonais ou Ortográficas

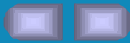
- **Matemática:** supondo a projeção ortogonal no plano de projeção $z = 0$. A direção de projeção é a mesma da normal ao plano de projeção, no caso, o eixo z . Um ponto $P(x,y,z)$ é projetado por $x_p = x$, $y_p = y$, $z_p = 0$.

$$P_{\text{ortogonal}} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeções Axonométricas

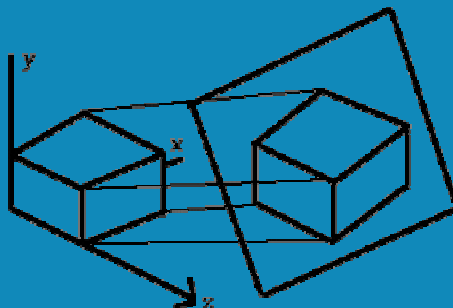
- Usadas para dar sensação 3D, a partir da proj. paralela
- mostra mais de uma face do objeto projetado
- o plano de projeção não pode ser perpendicular a um eixo principal
- pode ser:
 - *isométrica*
 - *dimétrica*
 - *trimétrica*



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeção Axonométrica

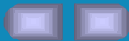
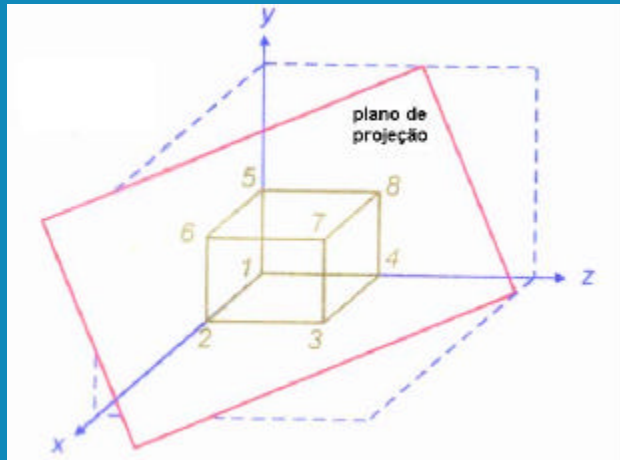
Projeção isométrica: a normal ao plano de projeção faz ângulos iguais com cada um dos eixos principais.



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeção Axonométrica Isométrica

- Seja o cubo (objeto) abaixo e o plano de projeção da figura:



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeção Axonométrica Isométrica

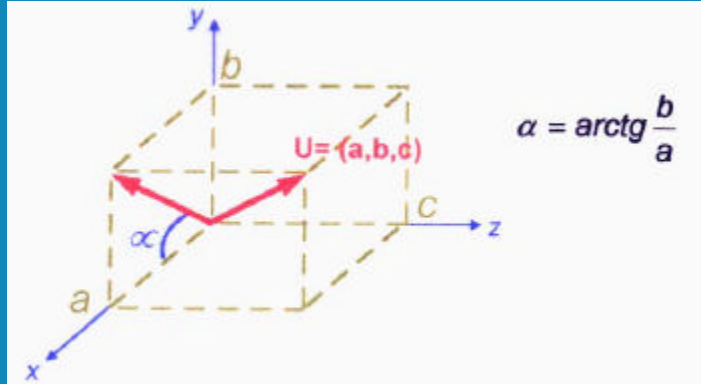
- Passos da projeção:
 - rotação com o plano de projeção de forma que o mesmo fique paralelo ao plano xy
 - nova rotação, em torno de y, de forma que a normal ao plano de projeção coincida com o eixo z
 - obtém-se os pontos da projeção.



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeção Axonométrica Isométrica

- Rotação para paralelismo a xy - rotação em torno do eixo z



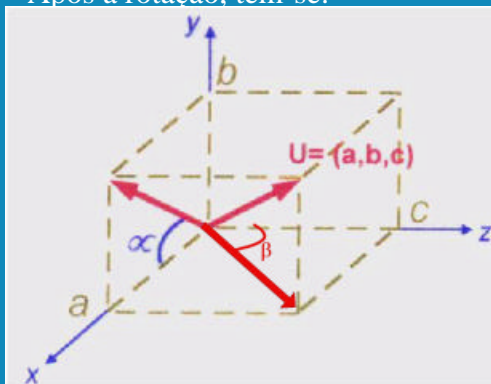
$$\alpha = \arctg \frac{b}{a}$$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeção Axonométrica Isométrica

Se isométrica, no passo anterior: $b=a=c$, então $\alpha = \arctg 1 = 45^\circ$

- Após a rotação, tem-se:



$$\beta = \arctg (a/c)$$

$$\beta = \arctg (1/\sqrt{2} / 1)$$

se isométrica:

$$\beta = 54,73^\circ$$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeção Axonométrica Isométrica

- Matriz da projeção:

$$M = \begin{bmatrix} \cos a \cdot \cos b & \sin a & 0 & 0 \\ -\sin a \cdot \cos b & \cos a & 0 & 0 \\ \sin b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

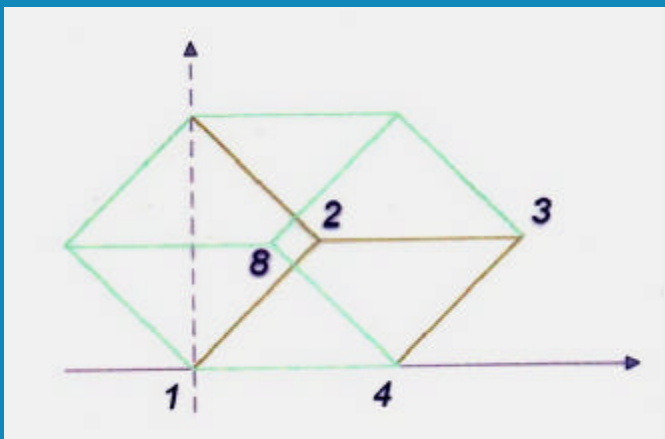
Se isométrica: $T_{iso} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7071 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.7071 & -0.5 & 0 \\ 0.7071 & 0 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeção Axonométrica Isométrica

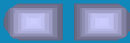
Resultado:



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeções Oblíquas

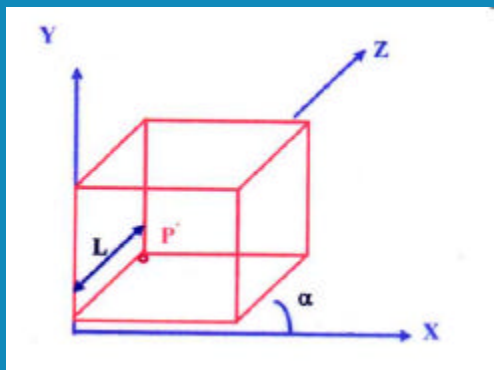
- Fornecem sensação espacial e permitem medidas
- a direção de projeção não forma 90° com o plano de projeção, mas,
- o plano de projeção é paralelo a um dos 3 eixos
- Geralmente:
 - faz-se uma face paralela ao plano de projeção (normalmente, a face que tem mais detalhes)
 - a face paralela projeta-se em sua verdadeira grandeza
 - não há deformação das formas desta face.



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeções Oblíquas

- Seja o cubo unitário da figura, deseja-se projetá-lo no plano xy:



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeções Oblíquas

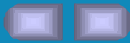
Matemática da projeção:

- o ponto $(0,0,1)$ é projetado em xy como $(l.\cos\alpha, l.\sin\alpha)$, levando a outro ponto no espaço dado por $P'(l.\cos\alpha, l.\sin\alpha, 0)$
- Como a linha projetora deve passar por P e P' , sendo as demais paralelas a ela, temos, considerando a equação simétrica da reta:

$$\frac{x - x_p}{l.\cos\alpha} = \frac{y - y_p}{l.\sin\alpha} = \frac{z}{-1}; \text{ destas relações, temos}$$

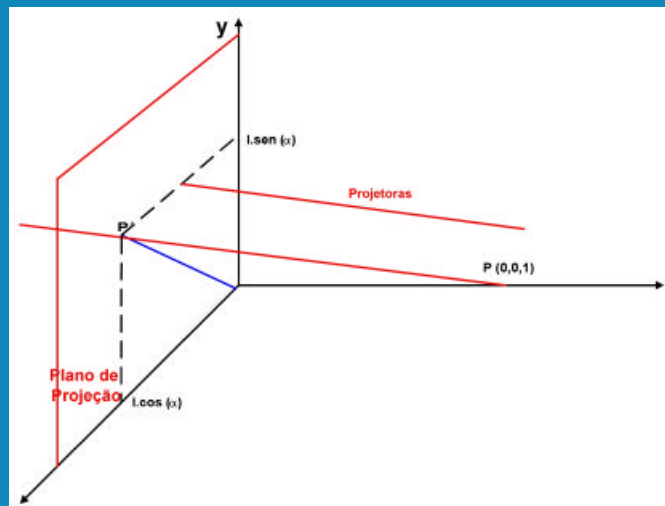
$$\frac{x - x_p}{l.\cos\alpha} = -z \Rightarrow x_p = x + z.l.\cos\alpha$$

$$\text{e } y_p = y + z.l.\sin\alpha$$



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeções Oblíquas

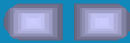


Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeções Oblíquas

- Matriz da projeção:

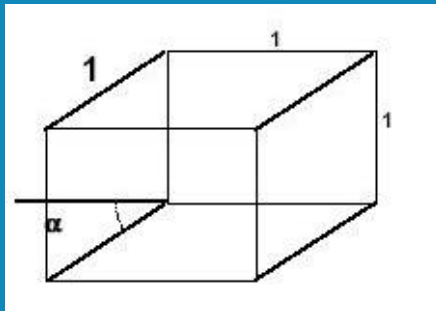
$$P_{obl.} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l \cdot \cos \alpha & l \cdot \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeções Oblíquas

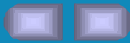
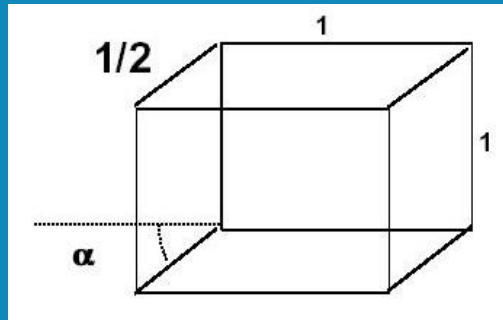
Se $l = 1$ e $\alpha = 45^\circ$ ($\beta = 45^\circ$) \Rightarrow projeção cavaleira (cavalier)



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Projeções Oblíquas

- Se $l = 1/2$ e $\alpha = 45^\circ$ ($\beta = \arctg 2$ - aprox: $63,4^\circ$) a projeção é dita gabinete (cabinet)



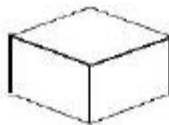
Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Comparações - projeções de um cubo

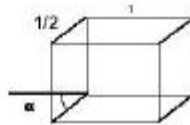
• Paralelas



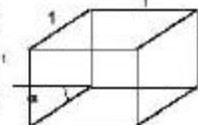
planta ou
elevação



iso-métrica

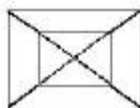


Cavaleira

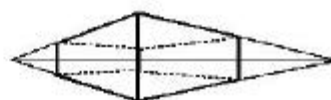


Cabinete

• Cônicas



1 pto de fuga

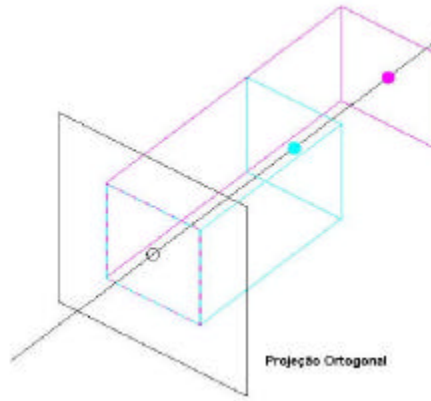


2 pto de fuga

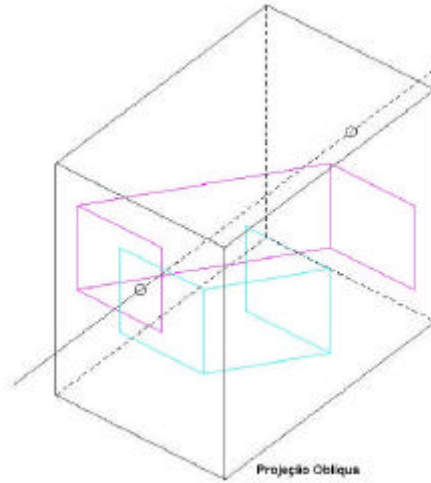


Prof. Dr. Alexandre Cardoso

Comparações



Projeção Ortogonal



Projeção Oblíqua

