

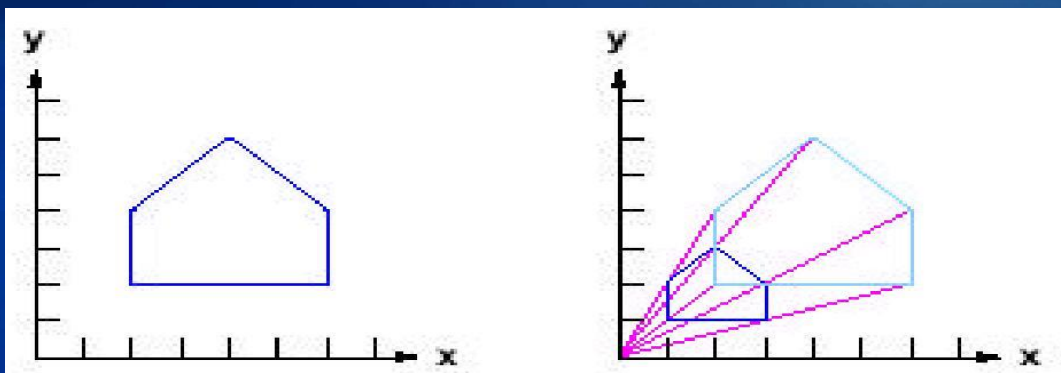
# Transformações Geométricas

- Operações matemáticas para alterar uniformemente o aspecto de um desenho
- não devem comprometer a estrutura do desenho, e sim o aspecto que o mesmo terá após a transformação
- Três tipos fundamentais:
  - escala
  - translação
  - rotação

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Escala

- Multiplicação de todas as coordenadas por fatores de escala (não-nulos)



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Escala

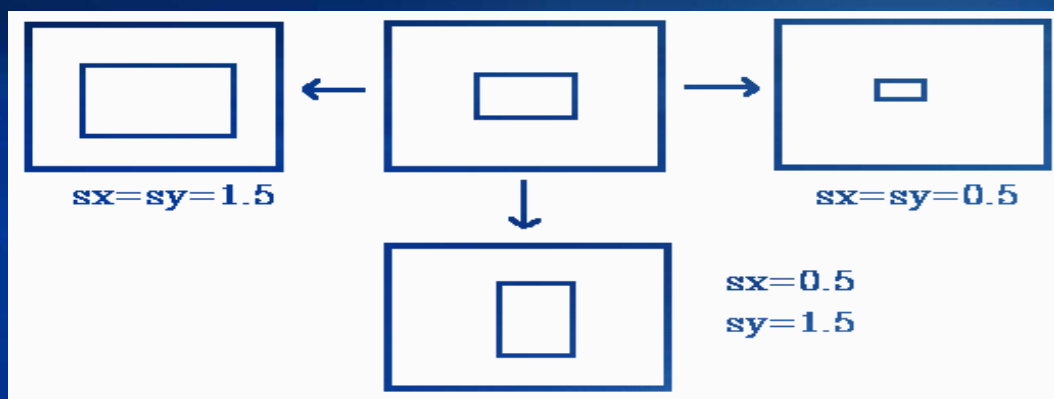
$$\begin{cases} x' = Ex \cdot x \\ y' = Ey \cdot y \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ex & 0 \\ 0 & Ey \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{obs : } \begin{cases} E > 1 \Rightarrow \text{Ampliação da imagem} \\ 0 < E < 1 \Rightarrow \text{redução da imagem} \\ E < 0 \Rightarrow \text{Espelhamento} \end{cases}$$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Escala

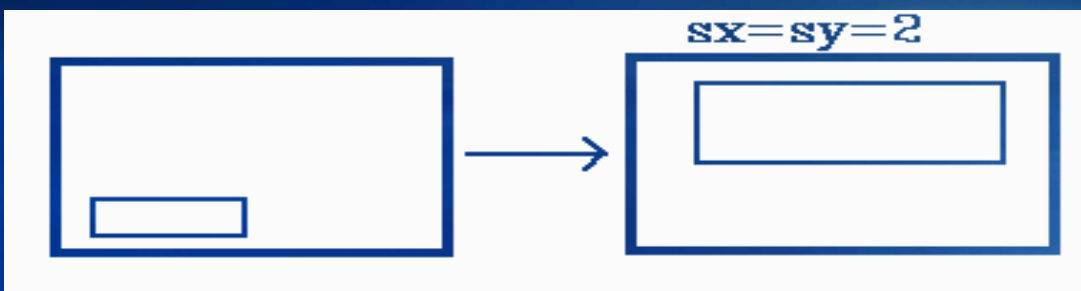
Exemplos de fatores de escala:



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Escala

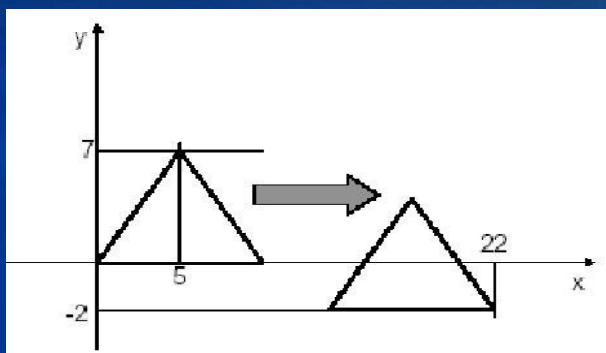
- Problema: posição do objeto



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Translação

- Movimentação da figura para outra posição no sist. de coordenadas: todos os pontos da imagem são deslocados de uma mesma distância:



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Translação

$$\begin{cases} x' = x + Tx \\ y' = y + Ty \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Tx \\ Ty \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

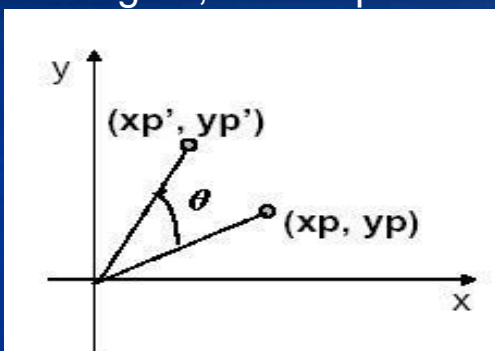
### Observações:

- Fatores podem ser diferentes para x e y
- suponha uma linha: n° muito grande de pontos: grande consumo de tempo - solução: translação aplicada aos pontos iniciais e finais da linha

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Rotação em torno da origem

- Movimentação da figura para outra posição, de forma que todos os pontos da imagem mantenham a mesma distância da origem, findo o processo



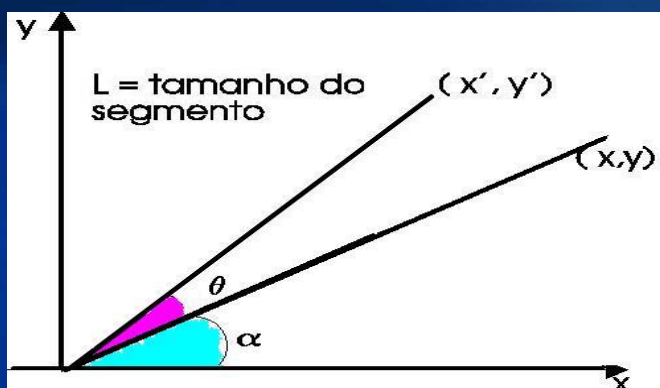
$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta & \text{(I)} \\ y' = y \cdot \cos \theta + x \cdot \sin \theta & \text{(II)} \end{cases}$$

$\theta$ : ângulo medido no sentido horário.

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Rotação em torno da origem

Demonstração:



$$L = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{L};$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{L};$$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Rotação em torno da origem

$L$  é a distância de  $(x', y')$  à origem também, temos

$$L = \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad \text{e} \quad \cos(\theta + \alpha) = \frac{x'}{L}; \quad \sin(\theta + \alpha) = \frac{y'}{L}$$

Como:

$$\begin{cases} \cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \\ \sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a \end{cases}$$

Temos:

$$\begin{cases} \frac{x'}{L} = \cos \theta \cdot \cos \alpha - \sin \theta \cdot \sin \alpha \\ \frac{y'}{L} = \sin \theta \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Daí:

$$\begin{aligned} x' &= L \cdot \cos \theta \cdot \cos \alpha - L \cdot \sin \theta \cdot \sin \alpha \\ y' &= L \cdot \sin \theta \cdot \cos \alpha + L \cdot \sin \alpha \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Matrizes de Transformação

- Se os pontos são tratados com coordenadas homogêneas, todas as transformações podem ser tratadas com multiplicações;
- Em coordenadas homogêneas, um ponto é tratado com um vetor de 3 valores (tripla)  $\Rightarrow (x, y, w)$ . O ponto transformado é representado por  $(x', y', w')$ .  $W$  é colocado para dar consistência nos cálculos

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Matrizes de Transformação: Escala

- Matriz de Escala:

$$E = \begin{bmatrix} Ex & 0 & 0 \\ 0 & Ey & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Exemplo:**

$$[x' \quad y' \quad w] = [3 \quad 2 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [x' \quad y' \quad w] = [6 \quad 4 \quad w]$$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Matrizes de Transformação: Translação

- Matriz de Translação:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Ou:}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Tx & Ty & 1 \end{bmatrix}$$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Matrizes de Transformação: Rotação

- Matriz de Rotação:

$$1. \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R \quad \text{para usar como:}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & w \end{bmatrix} \cdot R$$

$$2. \quad R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{para usar como:}$$

$$P' = R(\theta) \cdot P$$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Combinação das Transformações

Suponha a rotação de um objeto em torno de um ponto qualquer, como pode ser visto em:



As matrizes apresentadas não possibilitam tal processo de forma direta: devemos combiná-las!!!

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

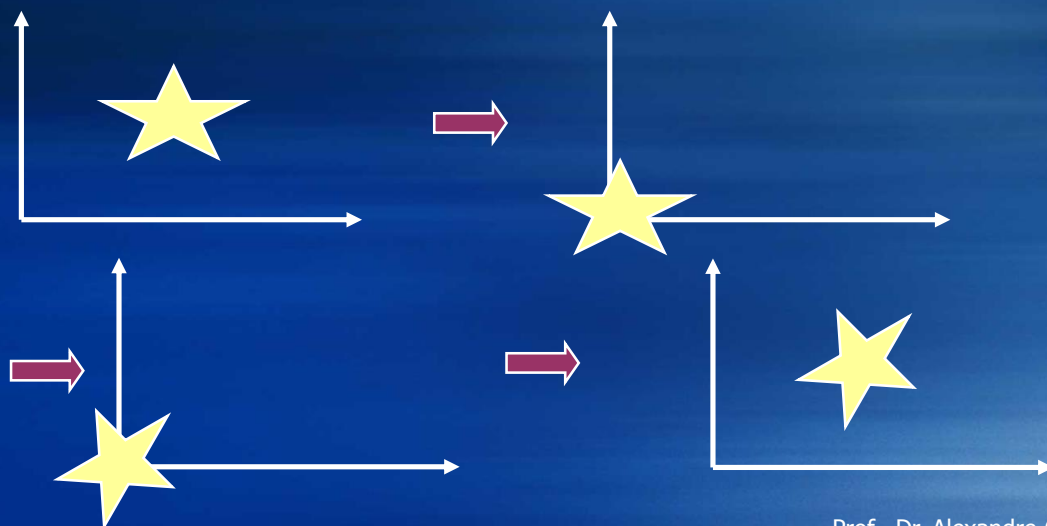
## Combinação das Transformações

- Seria necessário uma combinação das transformações:
  - translada o objeto para a origem
  - rotaciona do ângulo desejado
  - faz-se nova translação para a posição original

Proposição: desenvolver o processo de forma a acomodar a transformação em uma só matriz!!

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Combinação das Transformações



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Combinação das Transformações

- Seja a transformação:

$$(x, y) \xrightarrow{\text{transf. com uso de } M_1} (x_1, y_1) \xrightarrow{\text{transf. com uso de } M_2} (x_2, y_2)$$

Existe a matriz que promove a transformação diretamente, dada pelo produto  $m_1 \cdot m_2$ .

- Obs: o produto das matrizes não é comutativo, logo:  
 $m_1 \cdot m_2 \neq m_2 \cdot m_1$

- A ordem das transformações afeta fortemente o resultado final
- a utilização de uma única matriz representa ganho de eficiência

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## No exemplo dado

A combinação das transformações seria dada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_1 & -y_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} = T_T$$

Chegamos à seguinte matriz:

$$T_T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ x_1(1 - \cos \theta) + y_1 \cdot \sin \theta & y_1(1 - \cos \theta) - x_1 \sin \theta & 1 \end{bmatrix}$$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Caso 2: Escala seguida de translação

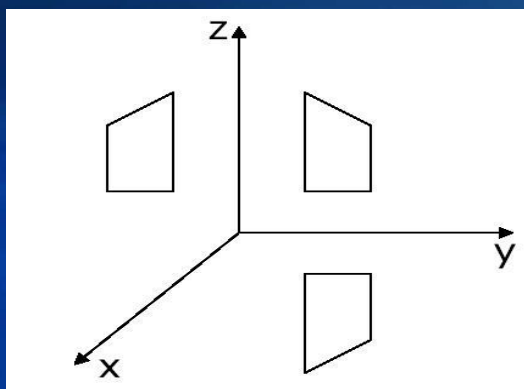
- translada-se o ponto de referência para a origem;
- promove-se a escala em torno da origem;
- translada-se da origem para o ponto de referência.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_1 & -y_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x & 0 & 0 \\ 0 & E_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} = T_{Tz}$$

$$T_{Tz} = \begin{bmatrix} E_x & 0 & 0 \\ 0 & E_y & 0 \\ x_1(1 - E_x) & y_1(1 - E_y) & 1 \end{bmatrix}$$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

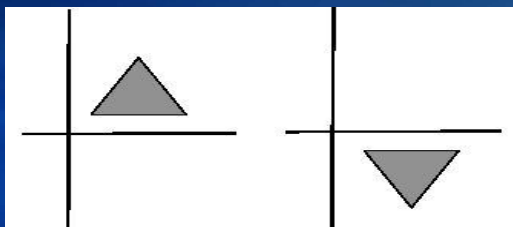
# Espelhamento



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

# Espelhamento

- Produção de imagens simétricas com uso de transformações de escala com fatores negativos:



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{c/ relação a } x \Rightarrow E_x = 1 ; E_y = -1 \\ \text{c/ relação a } y \Rightarrow E_x = -1 ; E_y = 1 \\ \text{c/ relação a } x \text{ e } y \Rightarrow E_x = -1 ; E_y = -1 \end{array} \right.$$

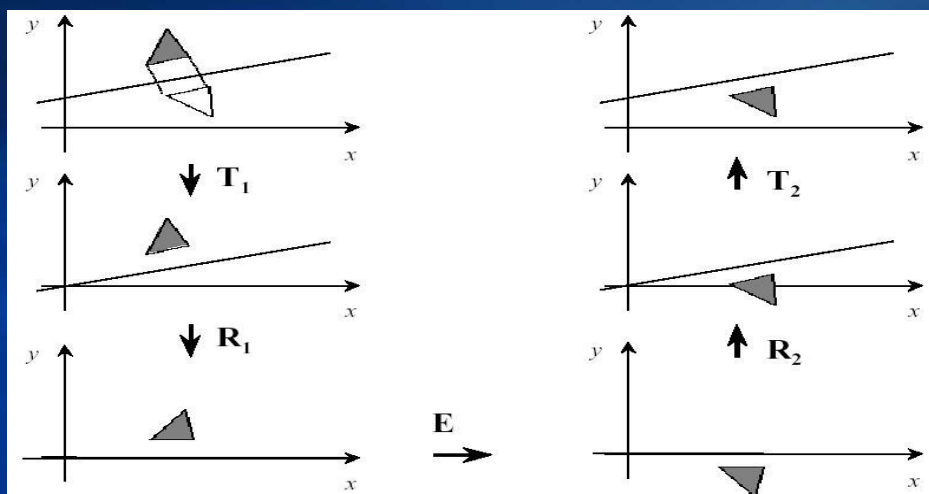
Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Espelhamento - reta qualquer

- Translada-se a figura de modo que um dos pontos da reta de simetria vá para a origem;
- Rotaciona-se a figura até que a reta de simetria se torne paralela à um dos eixos do sistema de coordenadas;
- Espelha-se a figura em relação ao eixo que, neste instante, coincide com a reta de simetria. Caso, seja o eixo Y, usa-se  $E_x = -1$ ;  $E_y = 1$ ;
- Rotaciona-se a figura em um ângulo oposto ao aplicado em  $\underline{b}$  -de forma a retornar a reta de simetria à sua posição original
- Transladar a figura com constantes de deslocamento opostas às aplicadas em  $\underline{a}$  , de modo a voltar a reta de simetria à sua posição

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

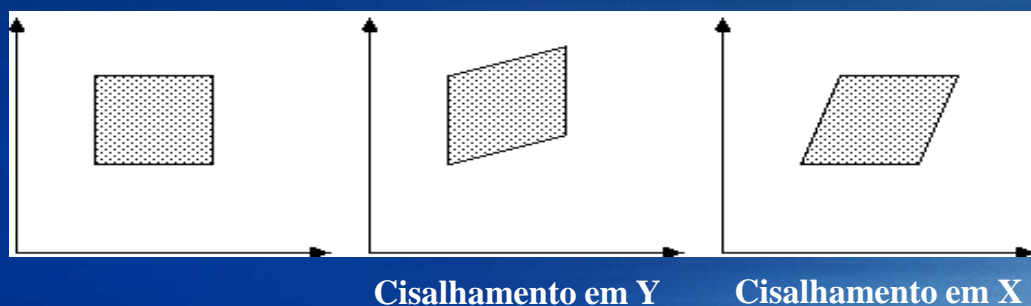
## Espelhamento - reta qualquer



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Cisalhamento - shear

- Distorce a forma do objeto, através da aplicação de escala a uma dada coordenada, em detrimento de outra:



Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Cisalhamento - shear

- Matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ shx & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & shy & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cisalhamento em X      Cisalhamento em Y

Prof. Dr. Alexandre Cardoso

## Considerações sobre eficiência:

Uma combinação de matrizes de rotação (R), escala (S) e transformação (T) pode produzir uma matriz de forma:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & Tx \\ r_{21} & r_{22} & Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

chegando a muitas operações: 9 multiplicações e 6 adições, podemos exigir menos operações com a exclusão da última linha:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{(2 \times 3)} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Prof. Dr. Alexandre Cardoso